

**Аналіз
найпоширеніших
помилок, які
припускаються при
написані тестів
зовнішнього
незалежного
оцінювання**

АНАЛІЗ НАЙПОШИРЕНІШИХ ПОМИЛОК

Існує думка, що зовнішнє незалежне оцінювання неможливо пройти успішно через занадто високі вимоги. Дійсно, вимоги, пропоновані на зовнішньому незалежному оцінюванні, дещо вищі за ті, що пропоновані у школі, і максимального результату можуть досягти хіба що переможці математичних олімпіад. При цьому гнучка система зовнішнього незалежного оцінювання спеціально розроблена для того, щоб усі учні були оцінені об'єктивно, тому учні, які добре знають математику в межах шкільної програми, на зовнішньому оцінюванні можуть претендувати на високий результат, цілком достатній для вступу до вищого навчального закладу.

На жаль, на зовнішньому незалежному оцінюванні в більшості випадків учні виявляють слабке знання шкільного курсу математики, і саме це є основною причиною «провалів». На підтвердження наведемо приклади елементарних помилок, яких припустилися учні під час написання тестів зовнішнього оцінювання в попередні роки (табл. 1).

У цьому розділі розбираються помилки, які найчастіше зустрічаються в роботах учнів на зовнішньому оцінюванні. Освоївши матеріал розділу, учні зможуть уникнути багатьох помилок при написанні тесту.

Перш ніж перейти до розбирання конкретних помилок, необхідно відзначити проблеми, що виникають в учнів через недостатність загальної математичної культури.

По-перше, багато хто зазнає труднощів у ході перекладання словесної умови завдання на мову математичних формул, рівнянь або нерівностей. Наприклад:

- вираз «довести, що функція $f(x)$ невід'ємна» записується $f(x) > 0$ замість $f(x) \geq 0$;
- вираз «при яких значеннях x значення функції $f(x)$ дорівнює 2,5» не асоціюється з рівнянням $f(x) = 2,5$;
- вираз « знайдіть радіус кулі, об'єм якої дорівнює об'єму куба з ребром a » не записується співвідношенням $\frac{4}{3}\pi r^3 = a^3$, хоча кожна з цих формул учням є відомою;
- вираз «трикутник, утворений осьми координат і прямою, що їх перетинає» не

Таблиця 1

Неправильно виконані перетворення	Правильно виконані перетворення
$\frac{x}{2x^2 + 3x} = 2x + 3$	$\frac{x}{2x^2 + 3x} = \frac{1}{2x + 3}$
$(1-x)^3 = (1-x)(1+x+x^2)$	$(1-x)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
$(x^{\sqrt{5}})^2 = x^5$	$(x^{\sqrt{5}})^2 = x^{2\sqrt{5}}$
$(9^{\sqrt{x}})^2 = 9^{2+\sqrt{x}}$	$(9^{\sqrt{x}})^2 = 9^{2\sqrt{x}}$
$\frac{4^x}{2^x} = 2$	$\frac{4^x}{2^x} = \frac{2^{2x}}{2^x} = 2^x$
$2^x + 4^x = 6^x$	$2^x + 4^x = 2^x + 2^{2x} = 2^x(1+2^x)$
$4 \cdot 2^x = 8^x$	$4 \cdot 2^x = 2^2 \cdot 2^x = 2^{2+x}$
$\sqrt{x^6} = x^3$	$\sqrt{x^6} = x^3 $
$\sqrt{a^2 - b^2} = a - b$	$\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{a^2 - b^2}$
$2x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2x}$	$2x^{\frac{1}{3}} = 2\sqrt[3]{x}$
$(\lg x^3)^2 = \lg x^6$	$(\lg x^3)^2 = \lg^2 x^3$
$\lg x^2 = 2 \lg x$	$\lg x^2 = 2 \lg x $
$\lg x + \lg y = \lg(x+y)$	$\lg x + \lg y = \lg xy$
$-\lg x = \lg(-x)$	$-\lg x = \lg x^{-1}$
$\lg^2 2x = \lg^2 2 + \lg^2 x$	$\lg^2 2x = (\lg 2 + \lg x)^2$
$\lg^2 x^2 = 2 \lg^2 x$	$\lg^2 x^2 = 4 \lg^2 x$
$10^{-\lg 5} = -5$	$10^{-\lg 5} = 10^{\lg 5^{-1}} = \frac{1}{5}$
$\arcsin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$	$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

викликає потреби знайти точки перетину цієї прямої з осями координат та ін.

По-друге, деякі учні плутаються в елементарних поняттях, наприклад не можуть чітко розділити поняття цілого і натурального, додатного і невід'ємного чисел. У результаті, вибираючи із множини розв'язків ті розв'язки, які задовільняють умову (наприклад, при виборі найменшого цілого числа з проміжку $(a; b)$), припускаються помилки.

По-третє, часто при відборі коренів не враховується область допустимих значень змінної тощо.

Для зручності типові помилки пропонуємо розібрати за темами.

1. ТОТОЖНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

При спрощенні виразів, обчисленні їх значень, розв'язуванні рівнянь і нерівностей необхідно робити тотожні перетворення заданих виразів.

При виконанні тотожних перетворень найчастіше виникають такі помилки.

1.1. Порушується порядок дій.

► **Приклад.** Спростити вираз $1 - \frac{\sqrt{x}}{x-1} : \frac{\sqrt{x}-1}{x}$.

⊖ Неправильне розв'язання

$$\text{Спочатку } 1 - \frac{\sqrt{x}}{x-1} = \frac{x - \sqrt{x} - 1}{x-1};$$

$$\text{потім } \frac{x - \sqrt{x} - 1}{x-1} : \frac{\sqrt{x}-1}{x} \text{ і т. д.}$$

⊕ **Правильне розв'язання**

Коментар. Спочатку слід виконати

$$\frac{\sqrt{x}}{x-1} : \frac{\sqrt{x}-1}{x}; \text{ потім виконати віднімання.}$$

Необхідно пам'ятати, що спочатку виконуються дії множення або ділення, а потім дії додавання й віднімання (за відсутності дужок та інших дій).

1.2. Неправильно застосовуються формули скороченого множення, порушуються правила дії над степенями з раціональним показником (табл. 2).

Таблиця 2

Неправильно	Правильно
$\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^{-3} = \frac{1}{\frac{3}{a^2} + \frac{3}{b^2}}$	$\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^3}$
$\frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 - b^2$	$\frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 + ab + b^2$
$(a - b)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}$	$(a - b)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a - b}$
$a^{-1} + b^{-1} = \frac{1}{a+b}$	$a^{-1} + b^{-1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$
$16^x - 4^x = (16 - 4)^x$	$16^x - 4^x = 4^x(4^x - 1)$
$9^{2-x} = 9^2 - 9^x$	$9^{2-x} = 9^2 : 9^x$

1.3. Розкладання многочленів на множники виконується нераціонально або не доводиться до кінця.

⊖ Неправильне розв'язання

$$x^3 - x^2 - x + 1 = x^2(x-1) - (x+1) = \text{(далі продовжити не вдалося).}$$

⊕ **Правильне розв'язання**

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - x + 1 &= x^2(x-1) - (x-1) = \\ &= (x^2 - 1)(x-1) = (x-1)^2(x+1). \end{aligned}$$

1.4. Скорочення дробів виконується з порушенням правил або не виконується взагалі (табл. 3).

Таблиця 3

Неправильно	Правильно
$\frac{2m + 2(m+n)^3}{(m+n)^2(2m+n)} = \frac{2m + 2(m+n)}{2m+n}$	Скоротити не можна
$\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha} = 1 + \cos \alpha$	Скоротити не можна
$\frac{a^4 - b^4}{a-b} = a^3 - b^3$	$\frac{a^4 - b^4}{a-b} = \frac{(a^2 + b^2)(a-b)(a+b)}{(a-b)} = (a^2 + b^2)(a+b)$
$\frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha - \sin 3\alpha}{\cos \alpha + \cos 2\alpha - \cos 3\alpha} = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} 3\alpha$	Скоротити не можна
$\frac{\sqrt{a^3b}(a\sqrt{a} + b\sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ (скорочення не зроблено)	$\begin{aligned} \frac{\sqrt{a^3b}(a\sqrt{a} + b\sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} &= \frac{\sqrt{a^3b}(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a - \sqrt{ab} + b)}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \\ &= \sqrt{a^3b}(a - \sqrt{ab} + b) \end{aligned}$

Дуже розповсюджену помилкою є спроба скоротити однаковий вираз, що стоїть у чисельнику і знаменнику, який хоча б в одному випадку (або в чисельнику, або в знаменнику) є не співмножником, а доданком.

1.5. Неправильно використовується поняття абсолютної величини дійсного числа при розкритті модуля.

» **Наприклад,** $|x-1|+x=2x-1$.

⊕ **Правильне розв'язання**

$|x-1|+x=2x-1$, якщо $x \geq 1$; $|x-1|+x=1$, якщо $x < 1$, і т. д.

Таких помилок можна уникнути, якщо пам'ятати, що абсолютною величиною дійсного числа a є невід'ємне дійсне число, що задовільняє умови:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{якщо } a > 0, \\ -a, & \text{якщо } a < 0, \\ 0, & \text{якщо } a = 0. \end{cases}$$

1.6. Неправильно виконуються дії з арифметичними коренями (табл. 4).

Таблиця 4

Неправильно	Правильно
$\sqrt{(4-\sqrt{32})^2} = 4 - \sqrt{32}$	$\sqrt{(4-\sqrt{32})^2} = \sqrt{32} - 4$
$\sqrt{\frac{a+1}{(1-a)^2}} = \frac{\sqrt{a+1}}{1-a}$, якщо $a > 1$.	$\sqrt{\frac{a+1}{(1-a)^2}} = \frac{\sqrt{a+1}}{a-1}$, якщо $a > 1$
$\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$	Спростити неможливо
$b\sqrt{2} = \sqrt{2b^2}$	$b\sqrt{2} = \sqrt{2b^2}$, якщо $b \geq 0$; $b\sqrt{2} = -\sqrt{2b^2}$, якщо $b < 0$

Необхідно пам'ятати, що значення квадратного кореня з невід'ємного числа a обчислюється за формулою $\sqrt{a^2} = |a|$.

1.7. При знаходженні однієї з тригонометричних функцій через задане значення іншої не враховуються знаки тригонометричних функцій залежно від положення кута.

» **Приклад.** Знайти $\operatorname{ctg} \alpha$, якщо $\sin \alpha = \frac{4}{5}$.

⊖ **НЕправильне розв'язання**

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}; \operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{4}.$$

Коментар. Тут помилка криється в тому, що при добуванні кореня ми можемо одержати як додатне значення, так і від'ємне, тобто $\operatorname{ctg} \alpha = \pm \frac{3}{4}$, тому необхідно шукати розв'язок окремо в кожній чверті.

⊕ **Правильне розв'язання**

Оскільки $\sin \alpha > 0$, то α може лежати тільки в I або в II чверті, отже:

$$\text{якщо } \alpha \text{ лежить у I чверті, то } \operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{4};$$

$$\text{якщо } \alpha \text{ лежить у II чверті, то } \operatorname{ctg} \alpha = -\frac{3}{4}.$$

2. РІВНЯННЯ

При виконанні тестових робіт учні розв'язують найрізноманітніші рівняння, що відрізняються за тематикою й складністю. Розібрати всі помилки, яких при цьому припинялися, немає можливості. Автори намагалися навести приклади найбільш поширених помилок і проаналізувати ситуації, у яких цих помилок припиняються.

2.1. При розв'язуванні рівнянь через виконання нетотожних перетворень може статися або *втрата кореня*, або *поява сторонніх коренів*.

2.1.1. При виконанні нетотожних перетворень у процесі розв'язування рівняння може статися звуження області допустимих значень невідомого, а отже, корені можуть виявитися втраченими.

• Втрата кореня може статися, якщо при розв'язуванні рівняння не враховується область допустимих значень невідомого.

» **Приклад.** Розв'язати рівняння

$$\lg(x-10)^2 + \lg x^2 = 2 \lg 24.$$

⊖ **НЕправильне розв'язання.**

$$2 \lg(x-10) + 2 \lg x = 2 \lg 24;$$

$$\begin{aligned}\lg(x-10) + \lg x &= \lg 24; \\ \lg x(x-10) &= \lg 24; \quad x^2 - 10x - 24 = 0; \\ x &= 12, \quad x = -2.\end{aligned}$$

Зробивши перевірку, переконалися, що всі корені задовольняють дане рівняння.

Відповідь: $-2; 12$.

Коментар. Через неправильне застосування формул відбулося звуження області допустимих значень невідомого.

⊕ Правильне розв'язання

Область допустимих значень невідомого

$$x \neq 0, \quad x \neq 10,$$

тоді

$$2\lg|x-10| + 2\lg|x| = \lg 24;$$

$$\lg|x-10| + \lg|x| = \lg 24;$$

$$\lg|x(x-10)| = \lg 24; \quad |x(x-10)| = 24; \\ x(x-10) = \pm 24;$$

$$1) \quad x^2 - 10x - 24 = 0; \quad x = 12, \quad x = -2;$$

$$2) \quad x^2 - 10x + 24 = 0; \quad x = 6, \quad x = 4.$$

Відповідь: $-2; 4; 6; 12$.

- При діленні обох частин рівняння на вирази, що містять невідоме, можуть бути втрачені корені, які обертають цей вираз на нуль.

► Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$3^x(x^2 - 2x - 3) = 9(x^2 - 2x - 3).$$

⊖ НЕправильне розв'язання

Розділили рівняння

$$3^x(x^2 - 2x - 3) = 9(x^2 - 2x - 3) \text{ на } (x^2 - 2x - 3).$$

$$\text{Одержано } 3^x = 9; \quad 3^x = 3^2; \quad x = 2.$$

Відповідь: 2 .

⊕ Правильне розв'язання

$$3^x(x^2 - 2x - 3) = 9(x^2 - 2x - 3).$$

Перенісши член $9(x^2 - 2x - 3)$ у ліву частину, одержимо $3^x(x^2 - 2x - 3) - 9(x^2 - 2x - 3) = 0$.

Виносимо спільний множник за дужки:

$$(x^2 - 2x - 3)(3^x - 9) = 0.$$

Звідси:

$$1) \quad x^2 - 2x - 3 = 0; \quad x = -1, \quad x = 3;$$

$$2) \quad 3^x - 9 = 0; \quad 3^x = 3^2; \quad x = 2.$$

Відповідь: $-1; 2; 3$.

► Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$\lg^2 x - \lg x = 0.$$

⊖ НЕправильне розв'язання

$$\lg^2 x - \lg x = 0. \quad \text{ОДЗ: } x > 0.$$

Розділили обидві частини рівняння на $\lg x$.

Одержано $\lg x - 1 = 0; \quad x = 10$.

Відповідь: 10 .

⊕ Правильне розв'язання

$$\lg^2 x - \lg x = 0. \quad \text{ОДЗ: } x > 0.$$

$$\lg x(1 - \lg x) = 0;$$

$$1) \quad \lg x - 1 = 0, \quad x = 10;$$

$$2) \quad \lg x = 0, \quad x = 1.$$

Відповідь: $1; 10$.

Необхідно пам'ятати, що зазвичай легше виключити сторонній корінь, ніж знайти втрачений.

2.1.2. При розв'язуванні існують дві діаметрально протилежні думки щодо перевірки отриманого результату. Одні вважають, що перевірка має виконуватися завжди, інші вважають її необов'язковою. Насправді перевірка отриманих коренів в одних випадках обов'язкова і є частиною розв'язування рівняння, а в інших випадках у перевірці потреби немає.

Перевірка отриманого розв'язку рівняння зазвичай робиться з метою виключення сторонніх коренів, які найчастіше з'являються в результаті неточок перетворень, які приводять до розширення області допустимих значень змінного.

Сторонні корені з'являються, наприклад, у таких випадках.

- При множенні обох частин дробового рівняння на вираз, який містить невідоме.

► Приклад. Розв'язати рівняння

$$\frac{5-x}{x-1} - \frac{5+3x}{x^2-1} = 0.$$

⊖ НЕправильне розв'язання

Помножили всі члени рівняння на $(x^2 - 1)$.

$$\text{Одержано: } (5-x)(x+1) - (5+3x) = 0.$$

Відповідь: $0; 1$.

Коментар. Був набутий сторонній корінь $x = 1$.

\oplus Правильна відповідь: 0.

- При скороченні дробу на множник, який містить невідоме.

$\blacktriangleright\!\!\!$ Приклад. Розв'язати рівняння

$$\frac{x^2 - 81}{x - 9} - 2x = 0.$$

\ominus НЕправильне розв'язання

$$\frac{(x-9)(x+9)}{x-9} - 2x = 0.$$

Скоротили дріб на $(x-9)$.

Отримали $x+9-2x=0$.

Відповідь: 9.

Коментар. Був набутий сторонній корінь $x=9$.

\oplus Правильна відповідь: розв'язків немає.

- При зведенні подібних доданків, що містять невідоме в знаменнику (у тому випадку, якщо вони взаємно знищуються).

$\blacktriangleright\!\!\!$ Приклад. Розв'язати рівняння

$$x^2 - \frac{2}{3x^2} - 4x + \frac{2}{3x^2} = 0.$$

\ominus НЕправильне розв'язання

Звели подібні доданки.

Одержані: $x^2 - 4x = 0$; $x=0$; $x=4$.

Відповідь: 0; 4.

Коментар. Був набутий сторонній корінь $x=0$.

\oplus Правильна відповідь: 4.

Зауваження. Аналогічно й для доданків, які містять змінну під знаком радикала або під знаком логарифма.

- При піднесенні до парного степеня обох частин рівняння.

$\blacktriangleright\!\!\!$ Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{7-x} = 2.$$

\ominus НЕправильне розв'язання

Після піднесення до квадрата обох частин рівняння і відповідних перетворень одержали:

$$\begin{cases} x = -3, \\ x = 5. \end{cases}$$

Відповідь: -3; 5.

Коментар. Був набутий сторонній корінь $x=-3$.

\oplus Правильна відповідь: 5.

$\blacktriangleright\!\!\!$ Приклад 2. Розв'язати рівняння $|x+2| = 2x$.

\ominus НЕправильне розв'язання

$$(x+2)^2 = 4x^2; -3x^2 + 4x + 4 = 0; \begin{cases} x = 2, \\ x = -\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Відповідь: $-\frac{2}{3}; 2$.

Коментар. Був набутий сторонній корінь $x = -\frac{2}{3}$.

\oplus Правильна відповідь: 2.

Необхідно пам'ятати, що якщо область допустимих значень невідомого знайдена й при розв'язуванні рівняння отримані корені, що належать їй, то перевірка коренів не потрібна, якщо при цьому в процесі розв'язування всі перетворення були тотожними.

2.1.3. Якщо при розв'язуванні рівняння використовується той факт, що добуток декількох множників дорівнює нулю, якщо хоча б один зі співмножників дорівнює нулю, необхідно перевірити, чи всі знайдені значення змінної задовільняють умову.

$\blacktriangleright\!\!\!$ Приклад. Розв'язати рівняння

$$(x-5)(x+2)\sqrt{x-3} = 0.$$

\ominus НЕправильне розв'язання

$$\begin{cases} x-5=0, \\ x+2=0, \\ x-3=0; \end{cases} \begin{cases} x=5, \\ x=-2, \\ x=3. \end{cases}$$

Відповідь: -2; 3; 5.

\oplus Правильне розв'язання

$$(x-5)(x+2)\sqrt{x-3} = 0. \text{ ОДЗ: } x \geq 3.$$

$$\begin{cases} x-5=0, \\ x+2=0, \\ x-3=0; \end{cases} \begin{cases} x=5, \\ x=-2, \\ x=3. \end{cases}$$

Відповідь: 3; 5.

2.1.4. Якщо в рівнянні добуток декількох множників дорівнює одиниці, то необов'язково кожний зі співмножників дорівнює одиниці.

$\blacktriangleright\!\!\!$ Приклад. Розв'язати рівняння

$$(x+1)(x^2 - x + 1) = 1.$$

⊖ НЕправильне розв'язання

$$(x+1)(x^2-x+1)=1.$$

$$\begin{cases} x+1=1, \\ x^2-x+1=1 \end{cases} \text{ і т. д.}$$

Відповідь: 0; 1.

⊕ Правильне розв'язання

$$(x+1)(x^2-x+1)=1. x^3+1=1; x^3=0; x=0.$$

Відповідь: 0.

2.2. При розв'язуванні деяких рівнянь досить вдалий є *метод заміни шляхом введення нової змінної*. Але застосовують цей метод учні не завжди правильно.

2.2.1. Необхідно пам'ятати, що замінити новою змінною треба найменший зі степенів.

►► **Приклад.** Розв'язати рівняння

$$5(x-3)^{\frac{1}{4}} - 6 = (x-3)^{\frac{1}{2}}.$$

⊖ НЕправильне розв'язання. Зробивши заміну

$$(x-3)^{\frac{1}{2}} = a, \text{ рівняння переписали у вигляді } 5a^2 - a - 6 = 0 \text{ і, звичайно, не одержали потрібного результату.}$$

⊕ Правильний результат можна одержати, зробивши заміну $(x-3)^{\frac{1}{4}} = a$.

2.2.2. При розв'язуванні ірраціональних рівнянь учні практично завжди застосовують метод піднесення до відповідного степеня. У результаті цього розв'язання ірраціональних рівнянь часто стають громіздкими й не доводяться до кінця.

►► **Приклад.** Розв'язати рівняння

$$x^2 - 4x - \sqrt{2x^2 - 8x + 12} = 6.$$

⊖ НЕправильне (нерациональне) розв'язання

Найчастіше дане рівняння розв'язують так: $x^2 - 4x - 6 = \sqrt{2x^2 - 8x + 12}$, а після піднесення обох частин рівняння до квадрата і зведення подібних доданків дістають рівняння $x^4 - 8x^3 + 2x^2 + 56x + 24 = 0$; продовження розв'язування не слідує, оскільки цей спосіб приводить до рівняння 4-го степеня, з яким може впоратися далеко не кожний учень.

Коментар. Дане рівняння легко розв'язується методом введення нової змінної.

⊕ Правильне розв'язання

$$\text{Нехай } \sqrt{2x^2 - 8x + 12} = m, \quad m \geq 0. \quad \text{Тоді } x^2 - 4x = \frac{1}{2}(m^2 - 12). \quad \text{Маємо } \frac{1}{2}(m^2 - 12) - m = 6, \quad \text{звідки } m^2 - 2m - 24 = 0; \quad m = 6.$$

З огляду на те, що $m \geq 0$, значення $m = -4$ не є коренем розв'язуваного рівняння. Отже, $\sqrt{2x^2 - 8x + 12} = 6$. Після піднесення обох частин рівняння до квадрата і зведення подібних доданків одержимо $x^2 - 4x - 12 = 0; \quad x = 6; \quad x = -2$. Відповідь: 6; -2.

Коментар. У цьому випадку після піднесення до квадрата не могли з'явитися сторонні корені, оскільки після піднесення до квадрата підкореневий вираз завідомо дорівнює додатному числу.

2.3. При розв'язуванні рівнянь у тих випадках, коли необхідно скористатися поняттями *абсолютної величини* й *арифметичного кореня*, припускаються серйозних помилок, пов'язаних або з незнанням, або з нерозумінням цих понять.

►► **Приклад 1.** $\sqrt{x^2} = 9$.

⊖ НЕправильне розв'язання

$$\sqrt{x^2} = 9; \quad x = 9.$$

Відповідь: 9.

⊕ Правильне розв'язання

$$\sqrt{x^2} = 9; \quad |x| = 9; \quad x = \pm 9.$$

Відповідь: ± 9 .

►► **Приклад 2.** Розв'язати рівняння

$$\sqrt{(x+3)^2} = x+3.$$

⊖ НЕправильна відповідь. Коренями вихідного рівняння є будь-яке дійсне число.

⊕ Правильне розв'язання

$$\sqrt{(x+3)^2} = x+3; \quad |x+3| = x+3. \quad \text{Оскільки модуль числа не буває від'ємним, то } x+3 \geq 0; \quad x \geq 3. \quad \text{Відповідь: } x \geq 3.$$

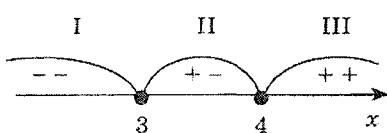
Беручи до уваги, що розв'язування рівнянь, які містять модуль, викликає найбільші труднощі, наведемо правильне розв'язання завдання, що пропонувалося на зовнішньому оцінюванні.

► Приклад. Розв'язати рівняння

$$|x-3| + |x-4| = 1.$$

⊕ Правильне розв'язання

Знаходимо корені виразів, які стоять під знаками модуля, і розташовуємо їх у порядку зростання. Вважаючи, що $x-3=0$ і $x-4=0$, знайдемо $x=3$ і $x=4$. Розбіжмо множину всіх дійсних чисел на інтервали й визначимо знак кожного внутрішньомодульного виразу на кожному з проміжків. На кожному з інтервалів розв'яжемо рівняння окремо.



I. $x \leq 3$. Для значень x із цього інтервалу маємо $|x-3| = -(x-3) = -x+3$; $|x-4| = -(x-4) = -x+4$, тобто дане рівняння зводиться до вигляду $-x+3-x+4-1=0$, звідки одержуємо $x=3$. Знайдений розв'язок належить розглянутому проміжку.

II. $3 < x < 4$. Для значень x із цього інтервалу маємо $|x-3| = x-3 = x-3$; $|x-4| = -(x-4) = -x+4$, тобто дане рівняння зводиться до вигляду $x-3-x+4-1=0$, що є тотожністю, отже, є справедливим для будь-якого x з інтервалу $3 < x < 4$.

III. $x \geq 4$. Для значень x із цього інтервалу маємо $|x-3| = x-3 = x-3$; $|x-4| = x-4$, тобто дане рівняння зводиться до вигляду $x-3+x-4-1=0$, звідки одержуємо $x=4$. Знайдений розв'язок належить розглянутому проміжку.

Таким чином, об'єднуючи відповіді, отримані на всіх інтервалах, одержуємо: $3 \leq x \leq 4$. Відповідь: $3 \leq x \leq 4$.

2.4. До помилкових розв'язань можна віднести й правильне *вгадування кореня* заданого рівняння без доведення його одиничності.

► Приклад. Розв'язати рівняння

$$x(x+1)(x+2)(x+3) = 24.$$

⊖ НЕправильне розв'язання

Підбором знаходить корінь $x=1$ із розкладання $24 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$.

Відповідь: 1.

Коментар. Був підібраний корінь $x=1$, однак втрачений, як мінімум, ще один корінь: $x=-4$, оскільки $24 = (-4) \cdot (-3) \cdot (-2) \cdot (-1)$.

Найпоширенішим методом доведення одиничності кореня нестандартного рівняння є використання властивості монотонності функцій, які входять у рівняння (графічний метод). Часто при цьому використовується похідна.

► Приклад. Розв'язати рівняння

$$x^{11} + 5x - 6 = 0.$$

⊕ Правильне розв'язання

Корінь $x=1$ легко вгадується, а похідна лівої частини дорівнює $11x^{10} + 5$ і додатна на всій числовій осі. Звідси випливає монотонність функції $y = x^{11} + 5x - 6$, що і доводить одиничність вгаданого кореня.

2.5. Для розв'язування логарифмічних і показових рівнянь використовуються спеціальні прийоми, засновані на властивостях логарифмів і степенів. Розглянемо пов'язані із застосуванням цих прийомів помилки.

2.5.1. При розв'язуванні рівнянь, які можна звести до рівності степенів з одинаковими основами або з одинаковими показниками, не завжди робляться правильні висновки.

► Приклад 1. Розв'язати рівняння $(\log_5 x)^{\frac{1}{3}} = 1$.

⊖ НЕправильне розв'язання

$$(\log_5 x)^{\frac{1}{3}} = (\log_5 x)^0.$$

Зробили висновок: $\frac{1}{3} \neq 0$, отже, рівняння не має коренів.

Відповідь: коренів немає.

⊕ Правильне розв'язання

Зведемо до куба обидві частини рівняння, тоді $\log_5 x = 1$; $x = 5$.

Відповідь: 5.

► Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$(x+5)^{x^2+x-2} = 1.$$

⊖ НЕправильне розв'язання

$$(x+5)^{x^2+x-2} = (x+5)^0; x^2 + x - 2 = 0; x = 1, x = -2.$$

Відповідь: -2; 1.

⊕ Правильне розв'язання

$$(x+5)^{x^2+x-2} = 1.$$

Логарифмуємо обидві частини рівняння за основою, наприклад 10, за умови, що $x > -5$, тоді $(x^2 + x - 2) \lg(x+5) = 0$.

1) $x^2 + x - 2 = 0 ; x = 1, x = -2 ;$

2) $\lg(x+5) = 0 ; x+5 = 1 ; x = -4 .$

Відповідь: $-4; -2; 1$.

Необхідно запам'ятати:

— із рівності степенів, основи яких дорівнюють одиниці, не випливає рівність показників цих степенів;

— степенево-показникові рівняння бажано розв'язувати методом логарифмування.

2.5.2. При розв'язуванні рівнянь, які використовують властивості логарифмів з однаковими основами, часто припускаються помилок.

► Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$\log_3 x \cdot \log_3(3x) = \log_3(81x).$$

⊖ НЕправильне розв'язання

$$\log_3(3x^2) = \log_3(81x); 3x^2 = 81x; x = 27.$$

Відповідь: 27.

Коментар. У розв'язуванні допущені дві грубі помилки: по-перше, добуток логарифмів двох чисел замінено на логарифм добутку цих чисел; по-друге, при розв'язуванні рівняння $3x^2 = 81x$ втрачено корінь $x=0$ (цей корінь не є коренем даного рівняння, але в розв'язуванні це відзначено не було).

⊕ Правильне розв'язання

$$\log_3 x \cdot \log_3(3x) = \log_3(81x).$$

Область допустимих значень невідомого $x > 0$;

$$\log_3 x \cdot (\log_3 3 + \log_3 x) = \log_3 81 + \log_3 x;$$

$$\log_3 x \cdot (1 + \log_3 x) = \log_3 3^4 + \log_3 x;$$

$$\log_3 x + \log_3^2 x = 4 + \log_3 x;$$

$$\log_3^2 x = 4; \log_3 x = \pm 2; x = 9; x = \frac{1}{9}.$$

Відповідь: $\frac{1}{9}; 9$.

► Приклад 2. Розв'язати рівняння $\lg x^2 = 4$.

⊖ НЕправильне розв'язання

$$2 \lg x = 4; \lg x = 2; x = 100.$$

Відповідь: 100.

⊕ Правильне розв'язання

$$\lg x^2 = 4;$$

$$2 \lg |x| = 4; \lg |x| = 2; |x| = 100; x = \pm 100.$$

Відповідь: $-100; 100$.

2.5.3. Значні труднощі виникають при виконанні дій над логарифмами з різними основами, оскільки учні або не вміють користуватися відповідними формулами, або не знають їх.

Перехід до логарифма з іншою основою зазвичай приводить до втрати кореня вихідного рівняння.

Треба пам'ятати, що втрати кореня не станеться, якщо новою основою логарифмів є функція, що визначена й набуває додатних значень, які відрізняються від одиниці, на всій області допустимих значень невідомого даного рівняння.

► Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$(\log_5 5 + 2) \log_5^2 x = 0.$$

⊖ НЕправильне розв'язання

ОДЗ: $x > 0$.

$$\left(\frac{1}{\log_5 x} + 2 \right) \log_5^2 x = 0; (1 + 2 \log_5 x) \log_5 x = 0;$$

$$\log_5 x = 0; x = 1; \log_5 x = -\frac{1}{2}; x = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Відповідь: $\frac{1}{\sqrt{5}}; 1$.

⊕ Правильне розв'язання

$$(\log_5 5 + 2) \log_5^2 x = 0. \text{ ОДЗ: } \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

$$\left(\frac{1}{\log_5 x} + 2 \right) \log_5^2 x = 0; (1 + 2 \log_5 x) \log_5 x = 0;$$

$$\log_5 x = 0; x = 1; \log_5 x = -\frac{1}{2}; x = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Відповідь: $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

► Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$20 \log_{4x} \sqrt{x} + 7 \log_{16x} x^3 - 3 \log_{\frac{x}{2}} x^2 = 0.$$

⊖ НЕправильне розв'язання

$$20 \log_{4x} \sqrt{x} + 7 \log_{16x} x^3 - 3 \log_{\frac{x}{2}} x^2 = 0.$$

$$10 \log_{4x} x + 21 \log_{16x} x - 6 \log_{\frac{x}{2}} x = 0;$$

$$\frac{10}{\log_x 4x} + \frac{21}{\log_x 16x} - \frac{6}{\log_x \frac{x}{2}} = 0;$$

$$\frac{10}{\log_x 4 + \log_x x} + \frac{21}{\log_x 16 + \log_x x} - \frac{6}{\log_x x - \log_x 2} = 0;$$

$$\frac{10}{2 \log_x 2 + 1} + \frac{21}{4 \log_x 2 + 1} - \frac{6}{1 - \log_x 2} = 0.$$

Нехай $\log_x 2 = t$, тоді

$$\frac{10(4t+1)(1-t) + 21(2t+1)(1-t) - 6(2t+1)(4t+1)}{(2t+1)(4t+1)(1-t)} = 0,$$

звідки одержуємо $26t^2 - 3t - 5 = 0$, якщо $t \neq 1$,

$$t \neq -\frac{1}{2}, t \neq -\frac{1}{4},$$

тобто

$$1) t = \frac{1}{2}; \log_x 2 = \frac{1}{2}; x^{\frac{1}{2}} = 2; x = 16.$$

$$2) t = -\frac{5}{13}; \log_x 2 = -\frac{5}{13}; x^{-\frac{5}{13}} = 2; x = \frac{1}{4^{\frac{5}{13}}}.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{1}{4^{\frac{5}{13}}}, 16.$$

Коментар. У наведеному прикладі зроблено переход до логарифма за основою x . Оскільки область допустимих значень невідомого вихідного рівняння $x > 0$, $x \neq \frac{1}{4}$, $x \neq \frac{1}{16}$, $x \neq 2$, а при переході до нової основи додається обмеження (нова основа не дорівнює нулю), то цей випадок необхідно розглянути окремо.

⊕ Правильне розв'язання

До наведеного вище розв'язування треба додати такі міркування.

Нехай $x = 1$, тоді $20 \log_4 \sqrt{1} + 7 \log_{16} 1^3 - 3 \log_{\frac{1}{2}} 1^2 = 0$, $0 = 0$, отже, $x = 1$ — загублений корінь рівняння.

$$\text{Відповідь: } \frac{1}{4^{\frac{5}{13}}}, 1, 16.$$

⊕ Приклад 3. Розв'язати рівняння

$$\log_{81} 4 + 5 \log_9 x - 2 \log_3 x = 1.$$

⊖ НЕправильне розв'язання

$$\log_{81} 4 + 5 \log_{81} x^2 - 2 \log_{81} x^4 = 1;$$

$$\log_{81} 4 + \log_{81} x^{10} - \log_{81} x^8 = 1;$$

$$\log_{81} (4 \cdot x^{10} : x^8) = 1; \log_{81} 4x^2 = 1;$$

$$4x^2 = 81; x = \pm 4,5.$$

Відповідь: $-4,5, 4,5$.

⊕ Правильне розв'язання

$$\log_{81} 4 + 5 \log_9 x - 2 \log_3 x = 1. \text{ ОДЗ: } x > 0.$$

$$\log_{81} 4 + 5 \log_{81} x^2 - 2 \log_{81} x^4 = 1;$$

$$\log_{81} 4 + \log_{81} x^{10} - \log_{81} x^8 = 1;$$

$$\log_{81} (4 \cdot x^{10} : x^8) = 1; \log_{81} 4x^2 = 1;$$

$$4x^2 = 81; x = \pm 4,5.$$

Відповідь: $4,5$.

2.6. Видлення в окремий підрозділ *тригонометричних рівнянь* пов'язане з тим, що при їх розв'язуванні застосовуються не лише алгебраїчні методи. При розв'язуванні тригонометричних рівнянь учні припускаються таких помилок.

2.6.1. Розв'язання тригонометричних рівнянь записують неправильно або обмежуються зазначенням окремого розв'язку (табл. 5).

Таблиця 5

Рівняння	Неправильна відповідь	Правильна відповідь
$\sin x - \cos x = 0$	$x = \frac{\pi}{4}$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$	$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
$\sin x = \frac{1}{2}$	$x = (-1)^k \arcsin \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$	$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ctg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$	$x = -\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$	$x = \pi - \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

2.6.2. Не встановлюють область допустимих значень.

► Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x = 4 \sin x.$$

⊖ НЕправильне розв'язання

$$\frac{\sin 2x}{\cos 3x \cos x} = 4 \sin x; \sin 2x = 4 \sin x \cos x \cos 3x;$$

$$\sin 2x - 2 \sin 2x \cos 3x = 0; \sin 2x (1 - 2 \cos 3x) = 0.$$

Звідки:

$$1) \quad 1 - 2 \cos 3x = 0; \quad \cos 3x = \frac{1}{2}; \quad 3x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k; \\ x = \pm \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}. \\ 2) \quad \sin 2x = 0; \quad 2x = \pi k; \quad x = \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь: $\pm \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}; \quad \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Коментар. Припустилися дуже грубої помилки. При $x = \frac{\pi k}{2}$ і непарних k вихідне рівняння втрачає зміст. Помилка залишилася непоміченою в результаті того, що не було встановлено області допустимих значень змінної.

⊕ Правильна відповідь:

$$\pm \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

» **Приклад 2.** Розв'язати рівняння $\frac{\sin x}{x} = 0$.

⊖ НЕправильна відповідь: $\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Коментар. При $k=0$ корінь не належить області допустимих значень.

⊕ Правильна відповідь: $\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

2.6.3. Не враховують усі задані умови.

» **Приклад.** Розв'язати рівняння $\cos \frac{x}{2} - \cos x = 1$, якщо $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

⊖ НЕправильне розв'язання

$$\cos \frac{x}{2} - \left(2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 \right) = 1; \quad \cos \frac{x}{2} - 2 \cos^2 \frac{x}{2} = 0;$$

$$\cos \frac{x}{2} \left(1 - 2 \cos \frac{x}{2} \right) = 0.$$

Звідки:

$$1) \quad \cos \frac{x}{2} = 0; \quad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k; \quad x = \pi + 2\pi k, \text{ де } k \in \mathbb{Z}.$$

$$2) \quad 1 - 2 \cos \frac{x}{2} = 0; \quad \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2}; \quad \frac{x}{2} = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k; \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + 4\pi k, \text{ де } k \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь: $\pi + 2\pi k, \quad \pm \frac{2\pi}{3} + 4\pi k, \text{ де } k \in \mathbb{Z}$.

Коментар. Чимало учнів не звернули уваги, що жодне з отриманих розв'язків не задовільняє умову $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

⊕ Правильна відповідь: таких коренів немає.

2.6.4. Не враховують, що скорочення всіх членів рівняння на функцію, що містить невідоме, як правило, приводить до втрати коренів рівняння.

» **Приклад.** Розв'яжіть рівняння

$$\cos x (2 \sin 2x - 1) = \cos x \sin 2x.$$

⊖ НЕправильне розв'язання

$$2 \sin 2x - 1 = \sin 2x; \quad \sin 2x = 1; \quad 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k; \\ x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

⊕ Правильне розв'язання

$$\cos x (2 \sin 2x - 1) - \cos x \sin 2x = 0;$$

$$\cos x (2 \sin 2x - 1 - \sin 2x) = 0.$$

Звідки:

$$1) \cos x = 0; \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$2) 2 \sin 2x - 1 = \sin 2x; \quad \sin 2x = 1; \quad 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k; \\ x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

2.6.5. Недостатньо уваги приділяють перевірці. (При перевірці сторонніх коренів тригонометричних рівнянь можна використати, зокрема, одиничне коло.)

» **Приклад 1.** Розв'язати рівняння

$$\sin x + \cos x = 1.$$

⊖ НЕправильне розв'язання

$$(\sin x + \cos x)^2 = 1; \quad \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 1;$$

$$\sin 2x = 0; \quad 2x = \pi k; \quad x = \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

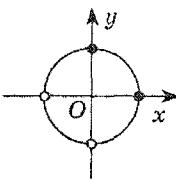
Відповідь: $\frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Коментар. Оскільки при розв'язуванні обидві частини вихідного рівняння підносили до квадрата (парний степінь), а його ліва частина може бути як додатною, так і від'ємною величиною, то могли з'явитися сторонні корені, отже, перевірка отриманого розв'язку є обов'язковою.

⊕ Правильне розв'язання

Після перевірки отриманих вище коренів одержуємо (див. рисунок):

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \text{ i } x = 2\pi k, \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$



Відповідь: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n; x = 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$.

► Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{3} \sin x + \cos x = 2.$$

⊖ НЕправильне розв'язання

Піднесли обидві частини рівняння до квадрата, тоді $(\sqrt{3} \sin x + \cos x)^2 = 4$;

$$3 \sin^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x = 4(\sin^2 x + \cos^2 x);$$

$$\sin^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 3 \cos^2 x = 0.$$

Розділили обидві частини на $\cos^2 x$, тоді $\operatorname{tg}^2 x - 2\sqrt{3} \operatorname{tg} x + 3 = 0$; $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; $x = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Відповідь: $\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Коментар. Якщо при такому розв'язуванні не зробити перевірки, то у відповідь потраплять сторонні корені. Дійсно, при непарних k права частина вихідного рівняння від'ємна.

⊕ Правильна відповідь: $\frac{\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$.

2.6.6. Не враховують, що при розв'язуванні рівнянь методом заміни може бути звужена область визначення, що може привести до втрати кореня.

► Приклад. Розв'язати рівняння

$$\sin 2x + 3 \cos 2x + 3 = 0.$$

⊖ НЕправильне розв'язання

Оскільки $\sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$; $\cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$,

$$\text{то } \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + 3 \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + 3 = 0;$$

$$2 \operatorname{tg} x + 3 - 3 \operatorname{tg}^2 x + 3 + 3 \operatorname{tg}^2 x = 0; \operatorname{tg} x = -3;$$

$$x = \arctg(-3) + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь: $\arctg(-3) + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Коментар. Область допустимих значень вихідного рівняння — усі числа, а при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ перехід від $\sin 2x$ і $\cos 2x$ до $\operatorname{tg} x$ неможливий.

Таким чином, область допустимих значень невідомого звузилася, а отже, випадок $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ необхідно перевірити окремо.

⊕ Правильна відповідь:

$$\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \arctg(-3) + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

3. СИСТЕМИ РІВНЯНЬ

Системи рівнянь із двома змінними зустрічаються в кожному тесті. Якщо система розв'язана правильно, то відповідь не залежить від вибраного методу розв'язування. Але помилки, яких припускаються учні під час розв'язування систем, пов'язані не тільки з розв'язуванням, а й з неправильною формою запису.

► Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \log_2 xy = 5, \\ \log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{y} = 1. \end{cases}$$

⊖ НЕправильний запис

$$\begin{cases} \log_2 xy = 5, \\ \frac{x}{y} = \frac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} \log_2 xy = 5, \\ y = 2x; \end{cases} \quad \begin{cases} \log_2 2x^2 = 5, \\ y = 2x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 = 2^5, \\ y = 2x; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = 16, \\ y = 2x; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm 4, \\ y = 2x; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm 4, \\ y = \pm 8. \end{cases}$$

Відповідь: $(\pm 4; \pm 8)$.

Коментар. Така форма запису передбачає наявність чотирьох розв'язків, а саме: $(4; 8)$, $(-4; -8)$, $(-4; 8)$, $(4; -8)$, тоді як у дійсності ця система має тільки два розв'язки: $\begin{cases} x = 4, \\ y = 8 \end{cases}$ або $\begin{cases} x = -4, \\ y = -8. \end{cases}$

⊕ Правильна відповідь: $(4; 8); (-4; -8)$.

► Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 4, \\ x^2 - 2xy + y^2 = 9. \end{cases}$$

⊖ НЕправильне розв'язання

$$\begin{cases} (x+y)^2 = 4, \\ (x-y)^2 = 9; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y = 2, \\ x-y = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 5, \\ 2y = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2,5, \\ y = -0,5. \end{cases}$$

Відповідь: $(2,5; -0,5)$.

Коментар. При розв'язуванні системи методом добування кореня з обох частин рівнянь має вийти чотири розв'язки, а саме:

$$\begin{array}{l|l|l} \left\{ \begin{array}{l} x+y=2, \\ x-y=3, \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} 2x=5, \\ 2y=-1, \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} x=2,5, \\ y=-0,5, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x+y=-2, \\ x-y=3, \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} 2x=1, \\ 2y=-5, \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} x=0,5, \\ y=-2,5, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x+y=2, \\ x-y=-3, \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} 2x=-1, \\ 2y=5, \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} x=-0,5, \\ y=2,5, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x+y=-2, \\ x-y=-3; \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} 2x=-5, \\ 2y=1; \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} x=-2,5, \\ y=0,5. \end{array} \right. \end{array}$$

⊕ Правильна відповідь:

$$(2,5; -0,5); (0,5; -2,5); (-0,5; 2,5); (-2,5; 0,5).$$

4. НЕРІВНОСТІ

Нерівності по праву вважаються одним із найскладніших розділів математики, і при їх розв'язуванні допускається найбільша кількість помилок. Зупинимося на тих, що зустрічаються найчастіше.

4.1. При правильному розв'язуванні нерівності учні неправильно визначають найбільше або найменше значення змінної, що задоволяє задану нерівність (табл. 6).

Таблиця 6

Неправильно	Правильно
$x > 4$ $x \in (4; +\infty)$, найменше ціле число $x = 4$. Відповідь: 4	$x > 4$ $x \in (4; +\infty)$, найменше ціле число $x = 5$. Відповідь: 5

4.2. При розв'язуванні нерівностей, у яких потрібно множити або ділити на невід'ємне число, знак нерівності не міняють на протилежний (табл. 7).

Таблиця 7

Неправильно	Правильно
$-x < 1$ $x < -1$	$-x < 1$ $x > -1$

4.3. Квадратичні нерівності — нерівності виду $ax^2 + bx + c \geq 0$ (≤ 0 , < 0 , > 0) часто розв'язують розкладом лівої частини на множники, тобто $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \geq 0$, де x_1 і x_2 — корені квадратичного тричлена $ax^2 + bx + c$. Це можна зробити, якщо корені квадратичного тричлена є дійсними числами. Однак у деяких випадках при розв'язуванні нерівностей цим способом можна легко дійти неправильного висновку.

► Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$6 + 5x - x^2 < 0.$$

⊖ НЕправильне розв'язання

$$-(x-2)(x-3) < 0; x \in (2; 3).$$

Відповідь: $(2; 3)$.

Коментар. Не враховано знак «мінус», що стоїть перед дужками. У таких випадках зручно спочатку нерівність домножити на (-1) , а потім її розв'язати.

⊕ Правильне розв'язання

$$x^2 - 5x - 6 > 0; (x-2)(x-3) > 0;$$

$$x \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty).$$

Відповідь: $(-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$.

► Приклад 2. Розв'язати нерівність

$$x^2 + 6x + 9 \geq 0.$$

⊖ НЕправильне розв'язання

$$(x+3)^2 \geq 0; x+3 \geq 0; x \geq -3.$$

Відповідь: $[-3; +\infty)$.

⊕ Правильне розв'язання

Нерівність $(x+3)^2 \geq 0$ виконується для всіх значень x , отже, x — будь-яке число.

Відповідь: $(-\infty; +\infty)$.

► Приклад 3. Розв'язати нерівність

$$x^2 - 4x + 4 > 0.$$

⊖ НЕправильне розв'язання

$$(x-2)^2 > 0 \text{ виконується для всіх значень } x.$$

Відповідь: $(-\infty; +\infty)$.

⊕ Правильне розв'язання

Якщо $x = 2$, $(x-2)^2 = 0$, отже, $x \neq 2$.

Відповідь: $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

► **Приклад 4.** Розв'язати нерівність

$$x^2 + 10x + 25 \leq 0.$$

⊖ НЕправильне розв'язання

$$(x+5)^2 \leq 0 \text{ — розв'язків немає.}$$

Відповідь: розв'язків немає.

⊕ **Правильне розв'язання**

$(x+5)^2 \leq 0$ відповідає розв'язку рівняння
 $(x+5)^2 = 0$, тобто $x = -5$.

Відповідь: -5 .

► **Приклад 5.** Розв'язати нерівність

$$x^2 + 5x + 9 > 0.$$

⊖ НЕправильне розв'язання

$$D = 25 - 36 = -11 < 0, \text{ отже, розв'язків немає.}$$

Відповідь: розв'язків немає.

⊕ **Правильне розв'язання**

При будь-якому значенні x ліва частина нерівності додатна.

Відповідь: $(-\infty; +\infty)$.

► **Приклад 6.** Розв'язати нерівність $x^2 - 9 \geq 0$.

⊖ НЕправильне розв'язання

$$x^2 \geq 9; x \geq \pm 3; x \geq 3.$$

Відповідь: $[3; +\infty)$.

⊕ **Правильне розв'язання**

Якщо $x^2 \geq 9$, то $|x| \geq 3$; $\begin{cases} x \geq 3, \\ x \leq -3. \end{cases}$

Відповідь: $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$.

Необхідно пам'ятати, що не можна добувати корінь з обох частин нерівності.

4.4. При розв'язуванні дробово-раціональних нерівностей помилок припускаються, наприклад, у таких випадках.

- При зведенні вихідної нерівності до системи нерівностей або до сукупності систем нерівностей.

► **Приклад.** Розв'язати нерівність $\frac{x+6}{x} > 0$.

⊖ НЕправильне розв'язання

$$\begin{cases} x+6 > 0, \\ x > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > -6, \\ x > 0; \end{cases} \quad x > 0.$$

Відповідь: $(0; +\infty)$.

Коментар. Дріб може бути додатним у двох випадках:

$$1) \begin{cases} x+6 > 0, \\ x > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > -6, \\ x > 0; \end{cases} \quad x > 0;$$

$$2) \begin{cases} x+6 < 0, \\ x < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x < -6, \\ x < 0; \end{cases} \quad x < -6.$$

⊕ **Правильна відповідь:** $(-\infty; -6) \cup (0; +\infty)$.

- При множенні обох частин нерівності на знаменник, який при будь-яких значеннях змінної не має певного знака.

► **Приклад 1.** Розв'язати нерівність $\frac{2x+3}{x-1} > 1$.

⊖ НЕправильне розв'язання

$$2x+3 > x-1; \quad 2x+3 > x-1; \quad x > -4.$$

Відповідь: $(-4; +\infty)$.

Коментар. Не можна множити обидві частини нерівності на знаменник, який містить невідоме, якщо заздалегідь не відомий його знак, у протилежному випадку потрібно розглядати два варіанти: $x-1 > 0$ або $x-1 < 0$.

Правильно розв'язати нерівність учням пропонується самостійно.

► **Приклад 2.** Розв'язати нерівність $\frac{x^2 + 81}{4 - x^2} > 0$.

⊖ НЕправильне розв'язання

$$x^2 + 81 > 0 \text{ при } x \neq \pm 2.$$

Відповідь: $(-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$.

⊕ **Правильне розв'язання**

Оскільки $x^2 + 81 > 0$ і дріб більший від нуля, то $4 - x^2 > 0$, отже, $x \in (-2; 2)$.

Відповідь: $(-2; 2)$.

► **Приклад 3.** Розв'язати нерівність $\frac{1}{x} \geq 2$.

⊖ НЕправильне розв'язання

$$2x \leq 1; \quad x \leq \frac{1}{2}. \quad \text{Відповідь: } (-\infty; 0,5].$$

⊕ **Правильне розв'язання**

$$\frac{1-2x}{x} \geq 0.$$

Після нескладних перетворень одержимо $x \in (0; 0,5]$.

Відповідь: $(0; 0,5]$.

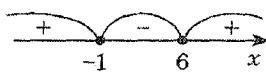
Відзначимо, що в нерівностях, які містять змінну в знаменнику, не можна позбутатися знаменника навіть у тому випадку, якщо вписано область допустимих значень. Виключення можуть становити лише особливі види нерівностей, у яких знаменник додатний для будь-яких значень змінної. Як, наприклад, $\frac{x^2 - 81}{4 + x^2} > 0$; $x^2 - 81 > 0$, оскільки друга нерівність отримана з першої множенням обох частин на додатне число $(x^2 + 4)$.

- При застосуванні методу інтервалів.

► **Приклад 1.** Розв'язати нерівність

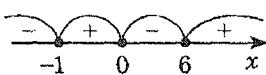
$$x(x-6)(x+1) \geq 0.$$

⊖ НЕправильне розв'язання



Відповідь: $x \in (-\infty; -1] \cup [6; +\infty)$.

Коментар. У даному розв'язанні не враховано, що порівнюється з нулем добуток трьох множників, а не двох. Таким чином, виходить не три інтервали, а чотири.

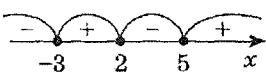


⊕ Правильна відповідь: $x \in [-1; 0] \cup [6; +\infty)$.

► **Приклад 2.** Розв'язати нерівність

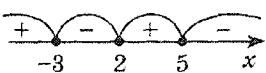
$$(x-5)(x+3)(2-x) \geq 0.$$

⊖ НЕправильне розв'язання



Відповідь: $x \in [-3; 2] \cup [5; +\infty)$.

Коментар. У цьому прикладі знаки на інтервалах проставлено неправильно. Так, на інтервалі $(5; +\infty)$, якщо $x=6$, наприклад, вираз $(x-5)(x+3)(2-x) < 0$. Тоді числову вісь із проставленими знаками на проміжках має виглядати так:

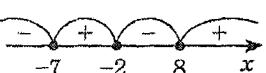


⊕ Правильна відповідь: $x \in (-\infty; -3] \cup [2; 5]$.

► **Приклад 3.** Розв'язати нерівність

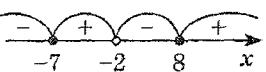
$$\frac{(x-8)(x+7)}{x+2} \geq 0.$$

⊖ НЕправильне розв'язання



Відповідь: $x \in [-7; -2] \cup [8; +\infty)$.

Коментар. У дробово-раціональних нерівностях область допустимих значень невідомого, тобто нулі знаменника, на числову вісь наносяться виколотими точками.

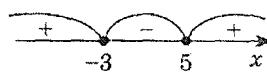


⊕ Правильна відповідь: $x \in [-7; -2) \cup [8; +\infty)$.

► **Приклад 4.** Розв'язати нерівність

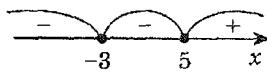
$$(x-5)(x+3)^2 \leq 0.$$

⊖ НЕправильне розв'язання



Відповідь: $x \in [-3; 5]$.

Коментар. У цьому прикладі знаки на інтервалах проставлено неправильно, оскільки при переході через корінь парної кратності знак не міняється.

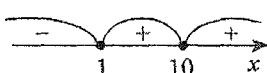


⊕ Правильна відповідь: $x \in (-\infty; 5]$.

► **Приклад 5.** Розв'язати нерівність

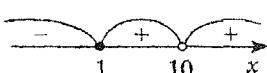
$$(x-1)(x-10)^3 > 0.$$

⊖ НЕправильне розв'язання



Відповідь: $x \in (1; +\infty)$.

Коментар. При розв'язуванні цієї нерівності не враховано те, що в точці $x=10$ ліва частина нерівності обертається на нуль, що не відповідає знаку заданої нерівності.

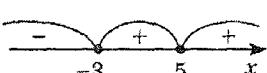


⊕ Правильна відповідь: $x \in (1; 10) \cup (10; +\infty)$.

► **Приклад 6.** Розв'язати нерівність

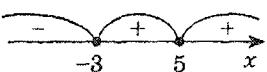
$$(x-5)^2(x+3) \leq 0.$$

⊖ НЕправильне розв'язання



Відповідь: $x \in (-\infty; -3]$.

Коментар. При розв'язуванні даної нерівності втрачено один розв'язок. При $x=5$ ліва частина нерівності обертається на нуль, що теж задовільняє дану нерівність.



⊕ Правильна відповідь: $x \in (-\infty; -3] \cup \{5\}$.

4.5. При розв'язуванні іrrаціональних нерівностей зазвичай припускаються таких помилок.

- Не враховують область допустимих значень для кореня парного степеня.

► **Приклад.** $\sqrt{x-5} < 2$.

⊖ НЕправильне розв'язання

$$x-5 < 4; x < 9.$$

Відповідь: $(-\infty; 9)$.

Коментар. Нерівність має зміст тільки за умови $x-5 \geq 0$.

⊕ Правильне розв'язання

$$x-5 \geq 0, \text{ тобто } \begin{cases} x-5 < 4, \\ x-5 \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x < 9, \\ x \geq 5; \end{cases} x \in [5; 9].$$

Відповідь: $[5; 9]$.

- Не враховують обмеження, які накладаються на вирази, що стоять поза знаком кореня парного степеня і містять невідому.

► **Приклад 1.** $\sqrt{4x+21} < x+4$.

⊖ НЕправильне розв'язання

$$\begin{cases} 4x+21 < (x+4)^2, \\ 4x+21 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 4x+21 < x^2 + 8x + 16, \\ 4x \geq -21; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x^2 - 4x + 5 < 0, \\ x \geq -\frac{21}{4}; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 4x - 5 > 0, \\ x \geq -5 \frac{1}{4}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)(x+5) > 0, \\ x \geq -5,25. \end{cases}$$

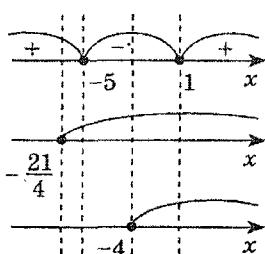
Відповідь: $(-5, 25; -5) \cup (1; +\infty)$.

Коментар. Значення $x \in (-\infty; -5)$ не задовільняють дану нерівність.

⊕ Правильне розв'язання

$$\begin{cases} 4x+21 < x^2 + 8x + 16, \\ 4x+21 \geq 0, \\ x+4 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 4x - 5 > 0, \\ 4x \geq -21, \\ x > -4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)(x+5) > 0, \\ x \geq -\frac{21}{4}, \\ x > -4. \end{cases}$$



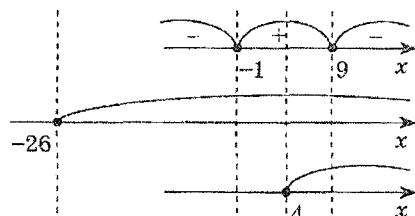
Відповідь: $(1; +\infty)$.

► **Приклад 2.** Розв'язати нерівність

$$\sqrt{x+26} \geq x-4.$$

⊖ НЕправильне розв'язання

$$\begin{cases} x+26 \geq x^2 - 8x + 16, \\ x+26 \geq 0, \\ x-4 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x-9)(x+1) \leq 0, \\ x \geq -26, \\ x \geq 4. \end{cases}$$



Відповідь: $[4; 9]$.

Коментар. Не розглянуто випадок, коли $x-4 < 0$.

⊕ Правильне розв'язання

$$\begin{cases} x+26 \geq x^2 - 8x + 16, \\ x+26 \geq 0, \\ x-4 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 8x - 9 \leq 0, \\ x \geq -26, \\ x \geq 4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+26 \geq 0, \\ x-4 < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -26, \\ x < 4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-9)(x+1) \leq 0, \\ x \geq -26, \\ x \geq 4, \\ x \geq -26, \\ x < 4. \end{cases}$$

Розв'язком першої системи є проміжок $[4; 9]$, розв'язком другої — проміжок $[-26; 4)$. Таким чином, після об'єднання відповідей одержимо $x \in [-26; 9]$.

Відповідь: $[-26; 9]$.

4.6. При розв'язуванні показових і логарифмічних нерівностей неправильно застосовують властивості показової й логарифмічної функцій.

- Не враховують, що при додатній основі, меншій від одиниці, й показова, і логарифмічна функції є спадними.

► **Приклад.** Розв'язати нерівність

$$\left(\frac{4}{5}\right)^x \geq \left(\frac{4}{5}\right)^{-\frac{1}{3}}.$$

⊖ НЕправильна відповідь: $x \geq -\frac{1}{3}$.

Коментар. Необхідно було помінити знак нерівності.

⊕ Правильна відповідь: $x \leq -\frac{1}{3}$.

- Не враховують область допустимих значень змінної.

►► Приклад. Розв'язати нерівність

$$\log_4(x^2 + 3x) \leq 1.$$

⊖ НЕправильне розв'язання

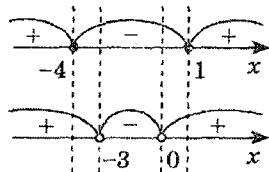
$$x^2 + 3x \leq 4; x^2 + 3x - 4 \leq 0;$$

$$(x+4)(x-1) \leq 0; x \in [-4; 1].$$

Відповідь: $[-4; 1]$.

⊕ Правильне розв'язання

$$\begin{cases} x^2 + 3x \leq 4, \\ x^2 + 3x > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x+4)(x-1) \leq 0, \\ x(x+3) > 0. \end{cases}$$



Відповідь: $[-4; -3] \cup (0; 1]$.

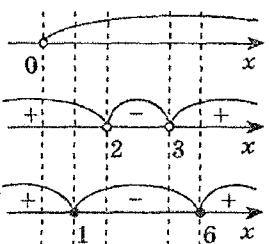
- Не враховують, що, коли в основі показової або логарифмічної функції міститься змінна, то потрібно розглядати декілька випадків.

►► Приклад 1. Розв'язати нерівність

$$\log_{2x}(x^2 - 5x + 6) \leq 1.$$

⊖ НЕправильне розв'язання

$$\begin{cases} x > 0, \\ x^2 - 5x + 6 > 0, \\ x^2 - 5x + 6 \leq 2x; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0, \\ x^2 - 5x + 6 > 0, \\ (x-2)(x-3) > 0, \\ x^2 - 7x + 6 \leq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0, \\ (x-2)(x-3) > 0, \\ (x-1)(x-6) \leq 0. \end{cases}$$



Відповідь: $[1; 2) \cup (3; 6]$.

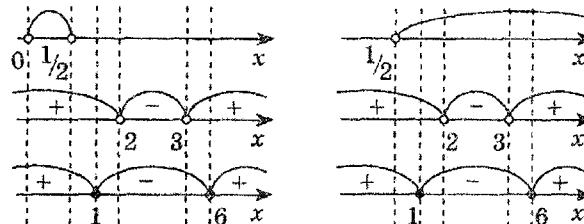
Коментар. Помилка перша. Врахована не вся область допустимих значень основи: $x > 0$, $x \neq 1$.

Помилка друга. Оскільки основа логарифма містить невідоме x , необхідно окремо розглядати два випадки.

⊕ Правильне розв'язання

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x < \frac{1}{2}, \\ x^2 - 5x + 6 > 0, \\ x^2 - 7x + 6 \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 2x > 1, \\ x^2 - 5x + 6 > 0, \\ x^2 - 5x + 6 \leq 2. \end{cases} \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > \frac{1}{2}, \\ x^2 - 5x + 6 > 0, \\ x^2 - 7x + 6 \leq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x > 0,5, \\ (x-2)(x-3) > 0, \\ (x-1)(x-6) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 0,5, \\ (x-2)(x-3) > 0, \\ (x-1)(x-6) \leq 0. \end{cases} \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x < 0,5, \\ (x-2)(x-3) > 0, \\ (x-1)(x-6) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 0,5, \\ (x-2)(x-3) > 0, \\ (x-1)(x-6) \leq 0. \end{cases} \end{array} \right]$$



У першому випадку розв'язком системи є проміжок $(0; \frac{1}{2})$, у другому — об'єднання проміжків $[1; 2) \cup (3; 6]$. Таким чином, після об'єднання відповідей одержимо $(0; \frac{1}{2}) \cup [1; 2) \cup (3; 6]$.

Відповідь: $(0; \frac{1}{2}) \cup [1; 2) \cup (3; 6]$.

►► Приклад 2. Розв'язати нерівність $x^{3x+1} > x^4$.

⊖ НЕправильне розв'язання

$$\begin{cases} 3x+1 > 4, \\ x > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1, \\ x > 0; \end{cases} \quad x > 1.$$

Відповідь: $(1; +\infty)$.

\oplus Правильне розв'язання

$$\begin{cases} x > 1, \\ 3x + 1 > 4, \\ 0 < x < 1, \\ 3x + 1 < 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1, \\ 0 < x < 1. \end{cases}$$

Відповідь: $(0; 1) \cup (1; +\infty)$.

4.7. При розв'язуванні нерівностей методом заміни учні досить часто *плутають знак супності та знак системи*, тобто не розуміють, що в першому випадку розв'язком нерівності є об'єднання декількох множин, а в другому випадку — їх переріз.

\gg Приклад 1. Розв'язати нерівність

$$\lg^2 x + \lg x - 2 \geq 0.$$

\ominus НЕправильне розв'язання

Нехай $\lg x = t$, тоді

$$t^2 + t - 2 \geq 0; \quad \begin{cases} t \geq 1, \\ t \leq -2; \end{cases} \quad \begin{cases} \lg x \geq 1, \\ \lg x \leq -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 10, \\ x \leq 0,01. \end{cases}$$

Відповідь: розв'язків немає.

Коментар. Розв'язання має зводитися до об'єднання, а не до перерізу двох проміжків, тобто — до розв'язування супності нерівностей.

\oplus Правильне розв'язання

$$\begin{cases} t \geq 1, \\ t \leq -2; \end{cases} \quad \begin{cases} \lg x \geq 1, \\ \lg x \leq -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 10, \\ x \leq 0,01, \\ x > 0. \end{cases}$$

Відповідь: $(0; 0,01] \cup [10; +\infty)$.

\gg Приклад 2. Розв'язати нерівність

$$x - 3\sqrt{x} + 2 \leq 0.$$

\ominus НЕправильне розв'язання

Нехай $\sqrt{x} = t$; тоді $t^2 - 3t + 2 \leq 0$;

$$\begin{cases} t \geq 1, \\ t \leq 2; \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{x} \geq 1, \\ \sqrt{x} \leq 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 1, \\ x \leq 4. \end{cases}$$

Відповідь: усі числа.

Коментар. По-перше, у наданому розв'язанні не врахована область допустимих значень змінної, а по-друге, розв'язання має зводитися до перерізу двох проміжків, а не до їх об'єднання, тобто до розв'язування подвійної нерівності.

\oplus Правильне розв'язання

$1 \leq t \leq 2; 1 \leq \sqrt{x} \leq 2; 1 \leq x \leq 4$. Відповідь: $[1; 4]$.

5. ЗАВДАННЯ З ПАРАМЕТРАМИ

5.1. При розв'язуванні рівнянь із параметрами не враховуються допустимі значення параметрів, які входять у рівняння.

\gg Приклад 1. Розв'язати рівняння $tx = n$.

\ominus НЕправильне розв'язання

$$\text{Відповідь: } x = \frac{n}{m}.$$

Коментар. Залишилося нез'ясованим, при яких значеннях m і n рівняння має розв'язки, тобто розв'язання рівняння фактично не доведено до кінця.

\oplus Правильне розв'язання

$$x = \frac{n}{m}.$$

- 1) Якщо $m \neq 0$, то ділення на m завжди можливе й рівняння має єдиний розв'язок.
- 2) Якщо $m = 0$ і $n \neq 0$, то рівняння розв'язків не має.
- 3) Якщо $m = 0$ і $n = 0$, то рівняння задовільняє будь-яке значення x .

\gg Приклад 2. Розв'язати рівняння $\cos x = a$.

\ominus НЕправильне розв'язання

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Коментар. У розв'язанні не враховано область значення параметра.

\oplus Правильне розв'язання

$$1) \text{ Якщо } |a| \leq 1, \text{ то } x = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$2) \text{ Якщо } |a| > 1, \text{ то рівняння розв'язків не має.}$$

5.2. При розв'язуванні *квадратних рівнянь із параметрами* розглядаються не всі можливі випадки.

\gg Приклад. Розв'язати рівняння

$$ax^2 - (3a+2)x + a = 0.$$

\ominus НЕправильне розв'язання

$$D = (3a+2)^2 - 4a^2 = 0; \quad a = -0,4 \text{ або } a = -2 \text{ і т. д.}$$

\oplus Правильне розв'язання

Для рівняння $ax^2 - (3a+2)x + a = 0$ єдиний розв'язок буде не тільки у випадку $D = 0$, як вирішили багато хто, а й у тому випадку, коли рівняння вироджується в лінійне, якщо $a = 0$.

5.3. При розв'язуванні систем рівнянь із параметрами майже завжди розглядається неповний перелік можливих ситуацій.

» **Приклад.** Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} mx + y = n, \\ x + my = m. \end{cases}$$

⊖ НЕправильне розв'язання

Після перетворень одержали,

$$\text{що } \begin{cases} (m^2 - 1)x = mn - m, \\ (m^2 - 1)y = m^2 - n, \end{cases} \text{ тобто } \begin{cases} x = \frac{m(n-1)}{m^2 - 1}, \\ y = \frac{m^2 - n}{m^2 - 1}. \end{cases}$$

Коментар. Розв'язання не доведено до кінця.

⊕ **Правильне розв'язання**

- 1) Якщо $m \neq \pm 1$, то ділення на $(m^2 - 1)$ завжди можливе й система має єдиний розв'язок.
- 2) Якщо $m = \pm 1$, а $m(n-1) \neq 0$ і $m^2 - n \neq 0$, система розв'язків не має.
- 3) Якщо $m = \pm 1$, $m(n-1) = 0$ і $m^2 - n = 0$ (останні рівності виконуються, якщо $n=1$), система має нескінченну множину розв'язків.

5.4. При розв'язуванні нерівностей з параметрами досить часто виникають проблеми з урахуванням допустимих значень параметрів.

» **Приклад.** Розв'язати нерівність

$$a(x-1) - x - 2 > 0.$$

⊖ НЕправильне (неповне) розв'язання

$$ax - a - x - 2 > 0; (a-1)x > a+2; x > \frac{a+2}{a-1}.$$

Коментар. Розв'язання слід було продовжити.

⊕ **Правильне розв'язання**

- 1) Якщо $a-1 > 0$, тобто якщо $a > 1$, то $x > \frac{a+2}{a-1}$.
- 2) Якщо $a-1 < 0$, тобто якщо $a < 1$, то $x < \frac{a+2}{a-1}$.
- 3) Якщо $a-1=0$, тобто якщо $a=1$, розв'язків немає (оскільки $0 \cdot x > 2$ — неправильно для будь-яких x).

5.5. При розв'язуванні логарифмічних і показових нерівностей з параметрами необхідно враховувати, що, залежно від величини основи (менша від 1 або більша за 1), розв'язання однієї й тієї самої нерівності вимагає розгляду сукупності випадків.

» **Приклад 1.** Розв'язати нерівність $a^x < a^3$.

⊖ НЕправильне розв'язання

$$x < 3.$$

⊕ **Правильне розв'язання**

Якщо $a > 1$, то $x < 3$, якщо $0 < a < 1$, то $x > 3$.

» **Приклад 2.** Розв'язати нерівність

$$\log_a x \geq \log_a 5.$$

⊖ НЕправильне розв'язання

$$x \geq 5.$$

⊕ **Правильне розв'язання**

Якщо $a > 1$, то $x \geq 5$, якщо $0 < a < 1$, то $0 \leq x \leq 5$.

6. ФУНКЦІЇ І ГРАФІКИ

6.1. Багато кому складно дати визначення такого найважливішого поняття математики, як область визначення функцій, і учні не справляються з розв'язуванням прикладів, у яких треба її встановити.

» **Приклад**

Знайти область визначення функції

$$y = \sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{4+x}}.$$

⊖ НЕправильне розв'язання

$$\begin{cases} -x \geq 0, \\ 4+x > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 0, \\ x > -4. \end{cases}$$

Відповідь: $\begin{cases} x \leq 0, \\ x > -4. \end{cases}$

Коментар. Треба було помітити, що при такому розв'язанні область визначення функції мають бути всі дійсні числа.

⊕ **Правильне розв'язання**

Насправді область визначення заданої функції є розв'язок системи зазначених нерівностей, тобто $x \in (-4; 0]$.

6.2. Найбільше або найменше ціле значення з області визначення функції учні найчастіше плутають із поняттям найбільшого або найменшого цілого значення функції.

» **Приклад.** Знайти найменше ціле значення з області визначення функції $f(x) = \sqrt{x-3}$.

⊖ НЕправильне розв'язання

Оскільки $\sqrt{x-3}$ не може бути від'ємним, то найменше ціле число — це 0. Відповідь: 0.

⊕ Правильне розв'язання

Областю визначення даної функції є всі значення аргументу, що задовольняють нерівність $x-3 \geq 0$, тобто найменшим цілим числом є число 3.

Відповідь: 3.

6.3. Таку важливу властивість, як *періодичність тригонометричної функції*, учні зазвичай знають і можуть визначити, чому дорівнює період заданої функції. Однак якщо задана функція являє собою якусь комбінацію тригонометричних функцій, то зі знаходженням її періоду вони, як правило, не справляються.

» **Приклад 1.** Визначити період функції

$$y = \cos 5x - \sin 2x.$$

⊖ НЕправильне розв'язання

Період для $y = \cos 5x - \sin 2x$ визначили в такий спосіб: для $y = \cos 5x$ період дорівнює 10π , для $y = \sin 2x$ період дорівнює 4π , отже, період даної функції дорівнює $10\pi - 4\pi = 6\pi$.

Відповідь: 6π .

⊕ Правильне розв'язання

Період для функції $y = \cos 5x$ дорівнює $\frac{2\pi}{5}$, для функції $y = \sin 2x$ період дорівнює $\frac{2\pi}{2} = \pi$, отже, період даної функції дорівнює

$$\text{НСК} \left(\frac{2\pi}{5}; \pi \right) = 2\pi.$$

Відповідь: 2π .

» **Приклад 2.** Визначити період функції

$$y = \cos^2 x.$$

⊖ НЕправильне розв'язання

Період для $y = \cos^2 x$ визначили в такий спосіб: для $y = \cos x$ період дорівнює 2π , отже, для $y = \cos^2 x$ період дорівнює 4π .

Відповідь: 4π .

Коментар. Оскільки в цьому прикладі необхідно спочатку понизити степінь, а потім визначити період одержаної функції, то для $y = \cos^2 x$, що дорівнює $y = \frac{1 + \cos 2x}{2}$, період обчислюється так.

⊕ Правильне розв'язання

$$\frac{2\pi}{2} = \pi.$$

Відповідь: π .

7. ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

7.1. Далеко не завжди за допомогою елементарних перетворень можна побудувати графік заданої функції. Найчастіше це простіше зробити за допомогою похідної. Але іноді й такий спосіб дослідження властивостей функцій і побудови графіків викликає в учнів труднощі. Найчастіше при цьому вони припускаються таких помилок.

- За *критичну точку* приймають точку, що не входить в область визначення заданої функції.

» **Приклад.** Визначити критичні точки функції $y = \frac{x^2}{x+2}$.

⊖ НЕправильне розв'язання

Якщо $y = \frac{x^2}{x+2}$, то $y' = \frac{x^2 + 4x}{(x+2)^2}$ і $-4; -2; 0$ — критичні точки.

Відповідь: $-4; -2; 0$.

Коментар. Якщо $x = -2$, то задана функція не існує.

⊕ Правильна відповідь: $-4; 0$.

- При записуванні *проміжків монотонності* у відповідь не включають кінці інтервалу.
- *Точкою екстремуму* вважають точку, у якій похідна дорівнює нулю.

» **Приклад.** Знайти точки екстремуму функції $y = x^3$.

⊖ НЕправильне розв'язання

Для функції $y = x^3$ похідна дорівнює $y' = 3x^2$, тоді $y' = 0$, отже, $x = 0$ — точка екстремуму.

Відповідь: $x = 0$.

Коментар. Якщо нанести точку на числову вісь і визначити знаки похідної ліворуч і праворуч від цієї точки, то при переході через неї виявиться, що похідна не міняє знак, а отже, ця точка не є точкою екстремуму.

⊕ Правильна відповідь: функція не має екстремуму.

- Не бачать різниці між екстремумом і точкою екстремуму.

►► Приклад. Знайти екстремум функції

$$y = x^2 + 2x + 3.$$

⊖ НЕправильне розв'язання

Для функції $y = x^2 + 2x + 3$ знайшли екстремум: $y' = 2x + 2$; $2x + 2 = 0$; $x = -1$.

Відповідь: -1 .

Коментар. При розв'язуванні було знайдено точку екстремуму, а щоб знайти екстремум, треба ще знайти значення функції в точці екстремуму, тобто обчислити значення y .

⊕ Правильне розв'язання

Розв'язання, наведене вище, необхідно закінчити.

$$y(-1) = 1 - 2 + 3 = 2.$$

Відповідь: 2 .

7.2. Далеко не всі учні правильно розуміють геометричний зміст похідної.

- Якщо в умові завдання пропонується знайти тангенс кута нахилу дотичної, проведеної до заданої функції в заданій точці, то пишеться рівняння дотичної, що призводить до зайвих обчислень, натомість достатньо було знайти похідну й обчислити її значення в заданій точці.

- При написанні рівняння дотичної учні забувають, що її рівняння є рівнянням виду $y = kx + b$, де $k = f'(x_0)$.

►► Приклад. Написати рівняння дотичної до графіка функції $y = x^3$ в точці $x_0 = 1$.

⊖ НЕправильне розв'язання

$$y' = 3x^2; y_0 = 1.$$

Рівняння дотичної має вигляд:

$$y = 3x^2 \cdot (x-1) + 1.$$

Відповідь: $y = 3x^2 \cdot (x-1) + 1$.

Коментар. Тут як величина k з'явилася похідна функції замість її значення в x_0 .

⊕ Правильне розв'язання

$$y' = 3x^2; y'(1) = 3, y_0 = 1.$$

Рівняння дотичної має вигляд:

$$y = 3(x-1) + 1, y = 3x - 2.$$

Відповідь: $y = 3x - 2$.

⊕ При нестандартних умовах, наприклад при написанні рівняння дотичної, що проходить через точку, яка не належить заданій функції, відсутність належної перевірки призводить до помилкових результатів.

►► Приклад. Написати рівняння дотичної до графіка функції $y = x^2$, що проходить через точку $M(2; 3)$.

⊖ НЕправильне розв'язання

$x_0 = 2; y' = 2x; y'(x_0) = 4; y_0 = 3$. Рівняння дотичної має вигляд: $y = 4(x-2) + 3$, $y = 4x - 1$. Відповідь: $y = 4x - 1$.

Коментар. Спочатку потрібно було перевірити, чи належить точка M кривій: $3 \neq 2^2$, а оскільки M не належить кривій, то x_0 у рівнянні дотичної невідомий.

⊕ Правильне розв'язання

$y' = 2x; y'(x_0) = 2x_0; y_0 = x_0^2$. Рівняння дотичної має вигляд: $y = 2x_0(x-x_0) + x_0^2$.

З огляду на те, що точка $M(2; 3)$ належить дотичній, одержимо: $3 = 2x_0(2-x_0) + x_0^2$. Звідки маємо $x_0 = 1$ або $x_0 = 3$. Отже, існують дві дотичні до кривої, що проходять через точку M : 1) $y = 2(x-1) + 1$; $y = 2x - 1$ і 2) $y = 2 \cdot 3(x-3) + 3^2$; $y = 6x - 9$.

Відповідь: $y = 2x - 1$; $y = 6x - 9$.

7.3. При інтегруванні складної функції ви-ду $y = f(kx+b)$ забувають, що її первісна дорівнює $\frac{1}{k} F(kx+b)$.

►► Приклад. Обчислити $\int \frac{1}{\cos^2 3x} dx$.

⊖ НЕправильне розв'язання

$$\int \frac{1}{\cos^2 3x} dx = \operatorname{tg} 3x + C.$$

⊕ Правильне розв'язання

$$\int \frac{1}{\cos^2 3x} dx = \frac{1}{3} \operatorname{tg} 3x + C.$$

7.4. Досить часто припускаються помилки при застосуванні формул Ньютона — Лейбніца.

►► Приклад 1. Обчислити $\int_1^2 3x^2 dx$.

⊖ НЕправильне розв'язання

$$\int_1^2 3x^2 dx = x^3 \Big|_1^2 = (2-1)^3 = 1.$$

⊕ Правильне розв'язання

$$\int_1^2 3x^2 dx = x^3 \Big|_1^2 = 2^3 - 1^3 = 7.$$

» Приклад 2. Обчисліти $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2x dx$.

⊖ НЕправильне розв'язання

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{1}{2} (\cos \pi - \cos 2\pi) = -1.$$

⊕ Правильне розв'язання

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{1}{2} (\cos 2\pi - \cos \pi) = 1.$$

7.5. Інтеграл від добутку або частки двох функцій вважається рівним добутку або часті інтегралів від цих функцій.

» Приклад 1. Знайти $\int \sin 2x \sin 4x dx$.

⊖ НЕправильне розв'язання

$$\int \sin 2x \sin 4x dx = \int \sin 2x dx \cdot \int \sin 4x dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cos 2x \cdot \frac{1}{4} \cos 4x + C = \frac{1}{8} \cos 2x \cos 4x + C.$$

⊕ Правильне розв'язання

$$\int \sin 2x \sin 4x dx = \int \frac{1}{2} (\sin 6x - \sin 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{12} \sin 6x + C.$$

» Приклад 2. Знайти $\int \frac{x^2 + x}{x} dx$.

⊖ НЕправильне розв'язання

$$\int \frac{x^2 + x}{x} dx = \frac{\int (x^2 + x) dx}{\int x dx} = \frac{\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C}{\frac{x^2}{2}}.$$

⊕ Правильне розв'язання

$$\int \frac{x^2 + x}{x} dx = \int \frac{x(x+1)}{x} dx = \int (x+1) dx = \frac{x^2}{2} + x + C.$$

8. ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ, ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

Помилки, яких припускаються учні при розв'язуванні завдань цих розділів математики, пов'язані в основному з незнанням відповідних формул або з неправильним їх застосуванням.

9. ГЕОМЕТРІЯ

9.1. Нетверде знання основних теорем геометрії призводить до суттєвих помилок у розв'язанні завдань.

Наприклад, радіус кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника, помилково визначають за формулою, отриманою для рівностороннього трикутника; поверхню неправильної піраміди помилково знаходять за формулою правильної піраміди тощо.

Крім того, деякі учні помилково вважають таке.

- ✗ У будь-якому опуклому чотирикутнику суми довжин протилежних сторін рівні, а протилежні кути в сумі становлять 180° .
- ✗ Центром кола, описаного навколо трикутника, є точка перетину його медіан.
- ✗ Бісектриса кута, що міститься між основою та бічною стороною рівнобедреного трикутника, є медіаною.
- ✗ Бісектриси в рівнобедреному трикутнику діляться в точці їх перетину у відношенні 1:2.
- ✗ Радіус кулі, вписаної в піраміду, дорівнює одній третині її висоти.
- ✗ Радіус, проведений у точку дотикання кулі, вписаної в піраміду, паралельний основі піраміди.

9.2. При розв'язуванні завдань на піраміду забувають таке.

- ✓ У піраміді, бічні ребра якої утворюють рівні кути з її основою, всі бічні ребра рівні; навколо основи можна описати коло;

висота піраміди проходить через центр цього кола.

- ✓ У піраміді, бічні грані якої утворюють рівні кути з її основою, всі висоти бічних граней рівні; в основу можна вписати коло; висота піраміди проходить через центр цього кола.

9.3. Типовою помилкою є неправильне розуміння умови задачі.

Так, наприклад, багато хто помилково вважає таке.

- ✗ Кут між бічним ребром і площинами основи похилого паралелепіпеда — це кут, утворений бічним ребром і стороною основи.
- ✗ Лінійний кут двогранного кута, утвореного бічною гранню і площинами основи правильної чотирикутної піраміди, — це кут між бічним ребром і стороною основи або кут між бічним ребром і діагоналлю основи.
- ✗ Кут між радіусом кулі, описаної навколо правильної чотирикутної призми, та її бічною гранню — це кут, утворений радіусом кулі й бічним ребром призми (радіус кулі проведений у вершину призми).
- ✗ Кут між мимобіжними діагоналями двох граней куба — це кут між однією з діагоналей і проекцією іншої на грань, у якій лежить перша діагональ.
- ✗ Відстань від центра основи правильної чотирикутної піраміди до бічної грані — це відстань від центра основи до сторони квадрата, що лежить в основі.

- ✗ Відстань від центра основи до бічного ребра — відстань, що дорівнює половині діагоналі основи.

9.4. Досить часто в завданнях частини З учні не наводять пояснення до креслення, не завжди обґрунтують кроки й етапи розв'язування, опускають дослідження отриманого розв'язку завдання.

9.5. У процесі розв'язування задачі лінійні й кутові величини, що не є даними задачі, учні нерідко позначають буквами x , y , α , β тощо, а потім забувають про це й в остаточній відповіді виражаютъ через них, залишаючи, таким чином, задачу нерозв'язаною.

9.6. До серйозних помилок у розв'язанні завдань призводять недостатньо розвинені просторові уявлення.

Так, багато учнів помилково вважають, що тілом, отриманим при обертанні трикутника навколо осі, що проходить через його вершину паралельно протилежній стороні, є циліндр.

У деяких учнів завдання залишаються нерозв'язаними, зокрема тому, що вони не можуть зобразити кут, утворений діагоналлю прямокутного паралелепіпеда з його бічною гранню, а також лінійний кут двогранного кута, утвореного сусідніми бічними гранями чотирикутної піраміди.

9.7. Креслення до завдань будуються недбало, без дотримання правил паралельного проектування.